

1. Граница применимости классической механики. Критерий перехода к квантовой механике. Если элементарное действие сравнима точность с постоянной планка при большом шаге - классическая механика.
Если нужен маленький шаг - то квантовая
2. Классическое и квантовые состояния одного объекта. (Элементы гильбертового пространства состояния). Формализм Дирака (Бра, кет векторы, операторы в этих базисах)
3. Статистический характер квантовых состояний. Правило Борна. Измерение (НЕ ПУТАТЬ С НАБЛЮДЕНИЕМ). Измерение в разных базисах. Алгоритм квантовой томографии на примере 1 кубита
4. Унитарная эволюция. Уравнение Шредингера и его решение. Решение через собственные состояния гамильтониана
5. Унитарные и эрмитовы матрицы. Связь между ними. Матрицы Паули и их коммутационное соотношение
6. Дискретизация непрерывных волновых функций. Операторы координаты, импульса, энергии и их собственные векторы и собственные значения. Дельта-функция Дирака. Уравнение Шредингера в непрерывной форме. Правило Борна для непрерывных волновых функций
7. Матрица плотности в дискретном и непрерывном виде. Уравнение Шредингера для матрицы плотности. Понятие открытой квантовой системы. Квантовое основное уравнение. Пример решения квантового основного уравнения
8. Координатный и импульсный базисы в пространстве состояний. Преобразование Фурье, как переход между ними. Основные свойства преобразования Фурье.
9. Композитные квантовые системы. Тензорное произведение векторов, пространств и операторов. Относительная матрица плотности. Чистые и смешанные состояния. Теорема Шмидта. SVD разложение.
10. Квантовые гейты: однокубитные, CNOT, CSign, Toffoli.
11. Классические вычисления с оракулом. P и NP классы. Их сложности. Классы сложности. NP-полные задачи.
12. Квантовый компьютер. Квантовый алгоритм, квантовый оракул. Использование анцилл при квантовых вычислениях. Квантовые вычисления с оракулом.
13. Квантовый алгоритм Гровера во всех формах.
14. Квантовое преобразование Фурье и его реализация в виде системы квантовых гейтов. Сложность квантового преобразования Фурье.
15. Алгоритм поиска собственных значений Абрамса-Ллойда. Общая схема алгоритма Шора факторизации целых чисел.
16. Алгоритм Залки-Визнера и его преимущество перед классическим методом моделирования квантовой динамики.
17. Алгоритм квантовой телепортации. Запрет на клонирование квантовых состояний.
18. Классическая и квантовая энтропия. Парадоксальное поведение квантовой энтропии.
19. Квантовая нелокальность. Схема эксперимента по проверке квантовой нелокальности. Нарушение неравенства Белла
20. Конечномерные модели квантовой электродинамики. Джейнс-Каммингс. Тавис-Каммингс, Тавис-Каммингс-Хаббард. Точный гамильтониан H_{JC} и приближение вращающейся волны (RWA)
21. Понятие тёмных состояний для ансамблей двухуровневых атомов. Тёмное подпространство в точной модели и в RWA
22. Оптическая проводимость графов. Оптическая темнота.
23. Понятие о конечномерных моделях ассоциации-диссоциации абстрактных атомов.

1. Граница между классич. механикой

Граница применимости квант. мех. определяет ур-е Шредингера

Если нужна точность сравнимая с $\hbar$, тогда в з-не от $\hbar$:

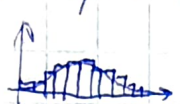
- шаг малый $\Rightarrow$ квантовая мех.

шаг = элементарное действие

- шаг большой $\Rightarrow$ классическая

2. Классич. и квант. сост. 1 объекта, P -м уровня

1) Квантовое сост. = суперпоз. классич.

Классич. сост. образ. лн. пр-во (кар. R^3), но для квант. нужно провести дискретизацию:  ^{класс. сост.} дискретизация: $0, 1, 2, \dots, N-1 \Rightarrow$ ортономы баз.

Вектора базиса: $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle$, $\forall$ векторы из этого пр-ва $\rightarrow$ в некоем пр-ве, $\rightarrow$ изоморфизм. с $\mathbb{C}^N$
^{квант.} состояние частицы: $|\Psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \chi_j |j\rangle$ χ_j - амплитуды (правило Борна)

] $\Psi(x)$ - волнов. ф-ция от непрерыв. перем x , нужно вновь дискретизировать, как?:

Множ. возм. ~~знач.~~ ^{знач.} перем $x = x_0, x_1, \dots, x_N$ ^{$x_0 + dx$} ^{$x_0 + l dx$} и $\Psi(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} \Psi(x_j) d_j(x)$ $\rightarrow$ кар.-ая ф-ция j -го отрезка

нормируем d_j : $|j\rangle = \frac{d_j}{\sqrt{dx}}$, а $\chi_j = \Psi(x_j) \sqrt{dx} \Rightarrow$ получим представление (1)

2) Векторы в нот. $\mathcal{D}$: $|\Psi\rangle$ - кет, $\langle\P|$ - бра $\langle\P| =$ сопряженный $|\Psi\rangle$

Скал. произв.: $\langle\P|\Phi\rangle$, матрицу можно задать: $M = \sum_{i,j=0}^{N-1} a_{ij} |i\rangle\langle j|$

M - унитарн. и эрмит.

3. Статистич. хар-р. прав. форм. Измер. манометр.

1) Измерение — случайная величина, кривин. знач. $|j\rangle$ с вер-ю $|\lambda_j|^2$
(состояние частицы $= |\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |j\rangle$). [прав. форма: $p_j = |\lambda_j|^2$]

Дан. ρ форм. и отражает статистический хар-р квант. состояний.

Во момент измерения (или наблюдения), ^{квант} система находит. во многих состояниях одновременно. А измер. (наблюд.) даёт 1 сост. с некот. вер-ю, от-веств. амплитудами. (Наблюдение даёт не само сост., а его с. зн.)

2) кв. манометр.: 1 сост. кубита равно $|\psi\rangle = \lambda_0 |0\rangle + \lambda_1 |1\rangle$, вынесем общ.

фаз. множ. факт.: $e^{i\varphi}$ (нет физ. смысла здесь). Измеряя одинаково упрот. такие кубиты, набор статистики, мы выясним значения λ_0 и $|\lambda_1|$,
остаток найти φ : фаза амплитуды $|\lambda_1|$ ($\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi}$). Далее

нужно взять другой базис (напр. Адамара: $|0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$; $|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$),

измерение в нём даёт $\cos \vartheta$. Поменяв базис ещё раз (напр. $\frac{|0\rangle \pm i|1\rangle}{\sqrt{2}}$), найдём

$\sin \vartheta \Rightarrow$ знаем все: $\lambda_0, |\lambda_1|, \vartheta$. (Перех в др. баз: $|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \langle \varphi_j | \psi \rangle \langle \varphi_j |$)

4. Унитарн. эволюц. Ур. Ш. и рел. Дем. соотв. соот. Кан.

1) Унитар. эволюц. - ^{непрерывная} - контакт с окружением (без измерений), напр.:

движение частицы в зад. потенциальн. поле. Тогда изменение частицы

описан. по закону, явл-ющ. решением Ур.-я Ш: $i\hbar |\dot{\Psi}\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$

Дем. зад. коши: $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}_t |\Psi(0)\rangle$, $\hat{U}_t = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t)$ - унитарен (оператор времени (гамильтон.)
(нужно соотв. нормировку или нет.)

$\hat{U}_t$ воздействует не только на $|\Psi(0)\rangle$, а на всевозможные нач. $|\Psi(0)\rangle$

2) В простых случаях можно решить ~~пробл.~~: зная с. ^{← φ_j} φ_j и с. ^{← E_j} E_j . Имеем:

реш. зад. Л.: $|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j e^{-\frac{i}{\hbar} E_j t} |\varphi_j\rangle$, $\lambda_j = \langle \varphi_j | \Psi \rangle$

5. Унитар и Эрм. матр. Связь. Матр. Паули.

1) Унитарн. оператор: сохр. длины $\forall$ вект. в пр-ве $\mathbb{C}^N$

Эрмитова матр.: самосопряж. $H = H^\dagger \rightarrow$ их с.в. образуют ортонорм. базис пр-ва $\mathbb{C}^N$

$\square$ $\exp(M) = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \dots$, тогда $\forall U$ -унитарн. (M -эрмитова), $\exists H(U): U = \exp(iH)$

(пример: матр. плотн. $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ - эрмитова, $\text{rang}=1$; $\text{trace}=1$)

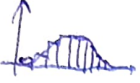
2) С матр. Паули связан оператор спина: $(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$

$$\hat{L}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_x \hat{L}_y = -\hat{L}_y \hat{L}_x = i \hat{L}_z; \quad \hat{L}_z \hat{L}_x = -\hat{L}_x \hat{L}_z = i \hat{L}_y$$

$$\lambda_{1,2} = -1, 1; \text{tr} = 0; \det = -1$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = 2i \hat{L}_z \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = 2i \hat{L}_x$$

6. Дискрет., опер. коэф., имп., ядр., с.в., с.з. δ -ф.д., ур. Ш. в пер., в.р. Ядро для пер.

1)  Загружен квант. сост. $0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow$ ортонорм. баз. в N -мерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^N$

$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |j\rangle$ λ_j - амплитуды $\psi(x)$ - волнов. ф-ия от пер. x , дискретиз.:

$\psi(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} \psi(x_j) d_j(x)$ много возм. знач. перем: $x = x_0, x_1, \dots, x_N$, $x_0 + dx, x_1 + dx, \dots, x_N + dx$, $d_j: |j\rangle = \frac{dx}{\sqrt{N}}$ $\lambda_j = \psi(x_j) \sqrt{N}$

Операторы: коэф: $\chi: f(x) \rightarrow \chi f(x)$ $\chi_{discr} =$ матрица на диагонали - ~~получим представ.~~ (1)

с.в.: базис. сост. N -кубитн. сист.: $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle$; с.з.: $0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$

В пер. форме им $\uparrow$ соответ. δ -ф-ии Дирака $\delta_\lambda: \delta_\lambda: f \rightarrow f(\lambda)$

геометрически, это - бесконечно близкие имп. из точек λ , в пер. - пробелы,

после дискретизации - не имп., а ступеньки $\delta_j(x)$ конечн. величины $\frac{1}{\sqrt{N}}$ dx - зримо N - одно разрез.

$$\delta_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega - \lambda)t} d\omega \quad (\text{учбо: } \delta = \begin{cases} +\infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases})$$

опер. импульса: $p: f(x) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla f$ $p_{discr} = A^{-1} QFT^{-1} \sqrt{N} \chi_{discr} QFT A$ $A = \text{diag}(e^{i\pi i a})$

с.ф-ии: $e^{\frac{i p x}{\hbar}}$

с.в.: $A^{-1} QFT^{-1} |a\rangle$; с.з.: $\sqrt{N} (a - \frac{1}{2})$ $a = 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$

$$QFT: |c\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} \exp(-\frac{2\pi i a c}{N}) |a\rangle; QFT^{-1}: |a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} \exp(\frac{2\pi i a c}{N}) |c\rangle$$

2) Ур-е Шр. в пер.: $i\hbar \dot{\Psi} = H(\vec{r}, \vec{p})$, $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$; N -мерная волн.ф.: $P(x \in \Delta) = \int_{\Delta} |\Psi(x)|^2 dx$

7. Матр. плот. в дискр. и конт., ур. Ш. матр. пл., отпр. кв. сист., коу, число

$$1) \rho = \sum_{i=0}^{N-1} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| - \text{дискр.}; \quad \rho(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\psi}(x) \psi(y) p_i - \text{контр.}$$

$\text{tr} = 1$, эрмит., неотр.

$\text{tr} = 1 \Rightarrow$ число сост.

$$\text{ур. Ш.}: \quad i\hbar \dot{\rho} = [\mathcal{H}, \rho]$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\{A, B\} = AB + BA$$

Открытая кв. сист.: Марковский слр. процесс: Закон эволюции системы не зависит от прошлых состояний сист. (не имеет долговременной памяти). Но особенно вырв. изредка какой-то части сист.

Такую систему описывает коу: $i\hbar \dot{\rho} = [\mathcal{H}, \rho] + i\mathcal{L}(\rho)$; $\mathcal{L}(\rho) = \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j (A_j \rho A_j^\dagger - \frac{1}{2}\{A_j^\dagger A_j, \rho\})$

A_j - факторы декоер., γ_j - интенсивность действия фактора.

8. Координатная и импульсная базисы в к-ве сот., преобр. Фурье как лев. и прав. св. в пр. Ф.

1) Преобр. Фурье: $f(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_R \exp\left(\frac{-ipx}{\hbar}\right) f(x) dx = \varphi(p)$

Обр. преобр. Ф: $\varphi(p) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_R \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \varphi(p) dp = f(x)$

Дискретная форма: QFT: $|c\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi i ac}{N}\right) |a\rangle$

QFT⁻¹: $|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i ac}{N}\right) |c\rangle$

(В-ва: • переводит дифференц. в умножение на аргумент (на const)

• выявляет скрытые периоды (переход в Ф-м от ω)

2) Импл. баз: $e^{ip_1 x}, \dots, e^{ip_n x}$

Коэф. баз: $\delta_{\lambda_1}, \dots, \delta_{\lambda_n}$

$U|q_i\rangle = e^{-iE_i t} |q_i\rangle$

→ скрытые периоды $|E_i| = ?$

Можно найти, не зная знат., а просто имея физически.

Один баз. разлож. по другому ⇒ получим обр. преобр. Фурье:

$e^{ipx} = \int S_{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda = \int S_p(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$ — это F⁻¹: $\varphi(p) \rightarrow f(x)$

F: $f(x) \rightarrow \varphi(p) = \int f(x) e^{-ipx} dx$
преобр. Фурье

9. Композитн. кб. сист. мез. транс. век, гр-в, ор-в, относ. напр. плотн. Учет исх. сист. T и U , SVD

2) гр-ва: $C^N \otimes C^M \Rightarrow |\psi\rangle \in C^N \otimes C^M$, то $|\psi\rangle = \sum_{j,k=0}^{N-1, M-1} \lambda_{jk} |j\rangle |k\rangle$ отпр. (напр.): $\begin{bmatrix} a_{11}\theta & \dots & a_{1n}\theta \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\theta & \dots & a_{mn}\theta \end{bmatrix}$

Загугу (и только!) можно представить: $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \sum_{j,k=0}^{N-1, M-1} \lambda_{jk} |jk\rangle$ - составные

$\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 = \{ |a\rangle \otimes |b\rangle \text{ и их лн. комб.}; |a\rangle \in \mathcal{L}_1; |b\rangle \in \mathcal{L}_2 \}$

тензоры: $T = T_1 T_2 \dots T_k \quad \forall q=1, \dots, k \quad T_q = \begin{cases} |\psi_i\rangle \\ \langle \phi_i| \end{cases}$ для $|\psi_i\rangle \in H_i; \forall i \exists \leq 2 \quad T_q$: нн. инд-т

$[T]$ коммутир $\Rightarrow T = \alpha |\psi_1\rangle \langle \phi_1| \dots |\psi_r\rangle \langle \phi_r|$, если их ровно 2, то только $|\phi_i\rangle$ и $\langle \psi_i|$, $\alpha \in C$

1) $\exists$ 2 частицы с клас. сист.: $|0_1\rangle, \dots, |(N-1)_1\rangle$ и $|0_2\rangle, \dots, |(M-1)_2\rangle$ соотв. Тогда сист. 2

Эти частицы имеют вид: $|j_1 k_2\rangle$, это абс. мез. транс. $|j_1\rangle \otimes |k_2\rangle$.

Несколько параметров 1-й частицы - тоже композ. сист.

3) Относ. напр. плотн.: частичное измерение: измер 1 кубит, остальные не трогает:

$P_1 = \text{tr}_2(\rho) = \sum_k \langle k | \rho | k \rangle$ ρ -напр. плотн. композ. сист. $\rho = \sum_{j,j',k,k'} p_{j,j',k,k'} |j\rangle \langle j'| \otimes |k\rangle \langle k'|$

Т. Ишмат: У сист. $|\psi\rangle$ комп. сист. $\exists$ нов. ортонорм. базисы: $|j_0\rangle, \dots, |j_{N-1}\rangle; |k_0\rangle, \dots, |k_{M-1}\rangle$ в гр-вах

компонентах C^N, C^M : $|\psi\rangle = \sum_{q=0}^s \alpha_q |j_q\rangle |k_q\rangle$, $s = \min(N-1, M-1)$, а α_q : $\sum_{q=0}^s |\alpha_q|^2 = 1$

(даёт числен. кар-ку мез. запутан. композ. сист. $|\psi\rangle \in C^N \otimes C^M$) (хотя и не всю напр., а 1 вектор (жёлтый))

SVD (следств. Т. Ишм.): $\forall M$: $\exists S, V, D$: $S M V = D$, S, V - унитарн., D - диагональн.

(представим M как набор коэф. λ_{ij} из разложения, тогда $S M V$ - напр. перх. к $|j_i\rangle$ и $|k_j\rangle$ базисам)

10. Квантовые цепи

Связано с фреймворком квант. комп. Квант. цепь - унитарный оператор,

действ. в пр-ве состояний 1, 2 или 3 кубитов, кот. можно реализовать физически

Большая сист. цепей получ. из всех однокубитных + хотя один 2-кубитный (напр. CNOT)

CNOT: $|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus x\rangle$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Sign: $(-1)^{xy} |x, y\rangle$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Toffoli: $T|x, y, z\rangle \rightarrow |x, y, z \oplus xy\rangle$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Общ. вид однокуб.: $\frac{a+c}{2}I + \frac{a-c}{2}\sigma_z + b_1\sigma_x - b_2\sigma_y = \begin{pmatrix} a & b_1 + ib_2 \\ b_1 - ib_2 & c \end{pmatrix}$

10. Классиф. вычисл. с Оракулом. P, NP, сложн, класс, NP-полн.

1) Рядов. сост.: $\{C_0, C_1, \dots, C_T\}$ количества $C_0 \xrightarrow{F} C_1 \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} C_T$

T - сложн. работа алг. F на входе C_0
вычисл., сложн. алг. F и пот. сост. C_0
 C_T - первое верн. конечн. сост.
 $|C_i|$ - сложн. C_i (функция) $T = C_F(C_0)$

сложн. F = max (сложн. C_i)

P. детерминистич. алгоритм (за полином. время) NP - недетерм., но НДМТ

2) Оракул: (компьютер, пользователь) добавляется элемент с вопросом к оракулу

$\Rightarrow \boxed{Q} \Rightarrow$ Ф. Оракул может обраб. локальной сложн. (н.б. невычислим)

$C_0 \xrightarrow{F} C_1 \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} C_i \xrightarrow{Q} C_{i+1} \xrightarrow{F} \dots$ применяем оракул Ф. Сложн. вычисл. с O_p = число обращений к Ф.
первое вопросное сост. $\Rightarrow$

3) NP-полные - самые сложные, к которым можно свести NP задачи.

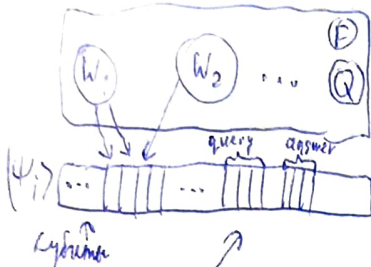
Классич. пример: SAT-проблема дана бул. ф-ция f, равна ли она 1 при входе x ($f(x)=1$?)

задача переборная. (Одна из канонич. задач, в кот. можно получить эквив. ускор.)
(алг. Тьюринга)

92) Элект. комп., чл., оракул, аномалии, вычисл. с оракл.

1) Квант матер.: 2 части: классик и квант. Простейшие упр. Действ.: универсальное поведение сист.
Квант - это универсальный образ, затем суживает измерение квант. части.

Примеч. Тесты - какие предвзр. нужно совершить



W_i - резисторы с унит. операторами

F - решет. концы вычисл. (=1 - измерение)

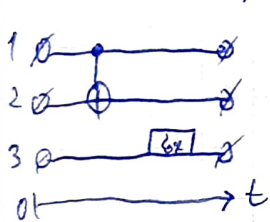
Q-пер. вопроса ($\Rightarrow$ применение определ.) (сн. опред.-мер.)

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{V_1(c_0)} |\psi_1\rangle \xrightarrow{V_2(c_0)} \dots \xrightarrow{V_t(c_0)} |\psi_t\rangle \text{ — измерение } V_t = W_1(1,2) \otimes W_2(3)$$

2) Отраж.: карта для востр. и ответа. $\varphi: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ φ -не взаимно однозначен.

$$Q\varphi - (\text{Квантовый аналог } \varphi) \quad Q\varphi |a, b\rangle = |a, b \oplus \varphi(a)\rangle \quad Q\varphi^2 = I \text{ взаимно обратн.}$$

Вектор с држ: $|\psi_0\rangle \xrightarrow{V_1} |\psi_1\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |\psi_i\rangle \xrightarrow{C_i, q=1, q^n} |\psi_{i+1}\rangle \xrightarrow{V_{i+2}} \dots \rightarrow |\psi_k\rangle \xrightarrow{F=1} \text{измерен}$



3) вычисл. с помощью: ансила - вспомогат. зч. на квант

денге, obviously добавл. в саст. 107/107...107.

Она может загрузиться с основным составом $\Rightarrow$ нужна сметка ожидания.

$| \chi_1 \rangle \rightarrow | \chi_2 \rangle = \boxed{} \otimes \boxed{\text{ancilla}}$ (только теперь её можно спросить)

13. Квант. алг. Провера бо бр. ф-ах

ГСА - Лев Тровер в 1996.] задана булева ф-ия $f(x)=1$ от n перемен.

1) У $f(x)=1$ ровно 1 корень. Для классич. комп. будет $\geq N=2^n$ обращ. к $f(x)$ (переборн. задача)

на квант. комп. x_{tar} найдем за $\tau = \lceil \sqrt{\frac{N}{c}} \rceil$ обращ. к $f(x)$ с точн. $\approx O(1/N^2)$

подпр.-во $L_R(|\tilde{0}\rangle, |x_{tar}\rangle)$ - вект. $\cong R^2$

инвер.-отв. $I|x_{tar}\rangle$ и $I|\tilde{0}\rangle$

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle \quad \text{WH}|\tilde{0}\rangle = |\tilde{0}\rangle \quad \text{WH}|\tilde{\sigma}\rangle = |\tilde{\sigma}\rangle$$

G не меняет ориент., см. вкл. поворотом L_R на угол α

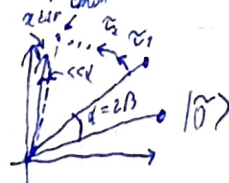
За τ шагов получим от. функцию к реш.:

$$\langle x_{tar} | G^\tau | \tilde{0} \rangle = 1 + \varepsilon \quad \varepsilon \sim \frac{1}{N^2}$$

2) У $f(x)$ ровно ℓ реш. и это известно.

$L_R(|\tilde{0}\rangle, |x_{tar}\rangle)$ $|x_{tar}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{k=1}^{\ell} |x_k\rangle$, затем аналог. 1), но $\beta = \arcsin \sqrt{\frac{\ell}{N}}$ $\ell \ll N$

$\tau = \lceil \frac{\pi \sqrt{N}}{2} \rceil \Rightarrow$ получим одно из решений.



$$\beta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{N}} \approx \frac{2}{\sqrt{N}}$$

иначе не
нужен алг.
почти наверняка

3) Неизв. сколько реш.:] $\tau_0=2$, далее наращиваем $=3, 4, \dots$ $\tau_5 = \left\lceil \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \frac{2}{\tau_0} \right\rceil$ - примерно
геом. прогресс.

довольно быстро найд. др. граничные ф-ии:  сложность ограничена $O(\sqrt{\frac{N}{\ell}})$

14. Квант преобр. Фурье, реализация, сложн.

Связано с дискретизацией ф-ции. Преобр. Фурье: $f(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_R \exp(-i p \lambda / \hbar) f(\lambda) d\lambda = \Phi(p)$

Преобр. Фурье переводит в д. ф-цию Фурье: $\delta_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{i(\omega - \lambda)t} dt$ Фурье⁻¹ = ...

$$\text{QFT: } |a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} \exp(-2\pi i ac/N) |c\rangle$$

$$\text{QFT}^{-1}: |a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} \exp(2\pi i ac/N) |c\rangle$$

унитарные и обратные.

Реализация на квантах QFT⁻¹ (для QFT то же самое, но вобр. порядке)

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

$$b = b_0 + b_1 \cdot 2 + \dots + b_{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

$$\chi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\varphi(a,b)}$$

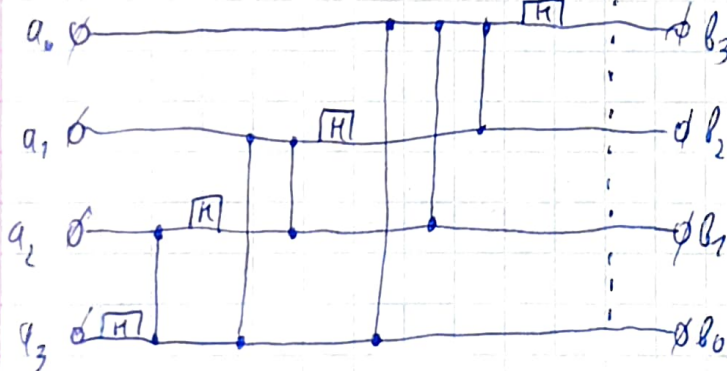
вклад в фазу: $\varphi(a,b) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b'_j$

$$b'_j = b_{n-1-j}$$

$$2) \text{ от } \sum_j e^{2\pi i \sum_{k \geq j} a_k b'_k} = 2\pi i \sum_j a_j b'_{n-j} = 2\pi i \sum_{k \geq j} a_k b_{n-1-k}$$

$$\text{итого: } \sum e^{2\pi i (j+k)} a_k b'_j = \chi(a,b) = \frac{2\pi i a b}{N}$$

Быстрое QFT: обратная перемешка ф-цией $\geq m$ задано



Сложн.: квадратичная n^2

15. Алг. поиска с.з. Шр.-Льюиса. Общ. сх. алг. Шора

$QFT_{\mathbb{Z}} U_{\text{cond}}$ - преобр. фр.-л. $U_y(x) = |x \cdot y \pmod{q}|$ y - простое $\Rightarrow$ он

взаимно сродн. $\Rightarrow$ унитарен Факторизация: $q = q_1 \cdot q_2$

$y^r \equiv 1 \pmod{q}$ y - случ. выбр. число из $\{0, 1, \dots, N-1\}$ $N = 2^n$, $2^{n-1} \leq q < 2^n$

$y^r - 1 \equiv 0 \pmod{q}$; $y^r - 1 = q \cdot s$; если r - чётное: $(y^{\frac{r}{2}} - 1)(y^{\frac{r}{2}} + 1) = q \cdot s \Rightarrow$ одна из скоб

с б.м.вер-ю делитель $q \Rightarrow$ зад. свой к.наход r .

$QFT_{\mathbb{Z}}(U_y)_{\text{cond}} |\psi\rangle\langle\psi|$ - наблюдаем собств. гист. оператора U через к.наход r .

$\downarrow$
 n^2 $\xrightarrow{\text{сложн.}}$ $\Rightarrow$ нет выигрыша, но можно U_{cond} реализовать эффективнее: спач. умножили на y , потом на $y^p, \dots, y^{p^k} \Rightarrow$ нашли n (жесточкое применение)
 Итого сложн.: $O(n^2 (\log n)^3)$ $n = \log q$ $O(\log^2 q (\log \log q)^3)$

16. Алг. Зинн-Визнера и его применение по ф. с квант.

Алгоритм Z моделирует квантовую унит. эволюцию (обобщение Фокера на случай унитар. эволюции)

На кажд. шаге вычисл. волновая ф-ция частицы.

Отлич. от реш. ур-я Шредингера: только, что ампл. λ_j по вычисл. шагам, а не по времени, квант. динамика вычисл. в дискр. представл. $|j\rangle = |0\rangle, |1\rangle, \dots$

$$\text{Волнов. ф-ция: } |\Psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |j\rangle$$

При дискретизации: опер. гамильт. энерг.: $V = \text{diag}(V(x_0), V(x_1), \dots, V(x_{N-1}))$ $x_k = \sqrt{\hbar} x_k$

Кинет. энергия: $K_{\text{diag}} = \text{diag}(-\frac{\hbar^2 p_0^2}{2m}, \dots, -\frac{\hbar^2 (p_{N-1})^2}{2m})$, $p_k = \sqrt{\hbar}(x_k - 1/2)$

$K = A^{-1} \text{QFT}^{-1} K_{\text{diag}} \text{QFT} A$ - коэф. базиса; $A = \text{diag}(\exp(i x_a^2))_{a=0, \dots, N-1}$

В квант. квант. погрешности: $\exp(-iVt/\hbar)$, преобр. Фурье, по сч. погр. опер. кинет. эн. и времени

Используя прил. Проттера: $\exp(A+B) \approx [\exp(Adt) \exp(Bdt)]^{t/dt}$

получаем алг. Z: $U_t = \exp(-\frac{i}{\hbar} H t) \approx [\exp(-\frac{i}{\hbar} K dt) \exp(-\frac{i}{\hbar} V dt)]^{t/dt}$

Кодиров. унит. динамики с квадратич. замедлением, но! Требуется память

пропорц. ~ 1 степени от числа реальных частиц, тогда как в классич.

методах память растёт экспоненциально.

17. Лек. Квант. мех. Запрет на клониров.

1) Квант. телепортация - передача на расстоянии между квант. сост., передавая только классич. информацию. Алиса - Боб: ЭПР-пара: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle)$.

Алиса: $|\psi_C\rangle$ - unknown (если много, то квант. телепорт.)

группируется в сост. $\lambda|0_C\rangle + \mu|1_C\rangle$. Алгоритм: 1) CNOT (ψ_A); 2) H (ψ_C); 3) измерение

отправляет рез. измер. Бобу $A=C=0 \Rightarrow$ сост. уже у Боба, иначе:

AC
01 $\Rightarrow$ G_Z
10 $\Rightarrow$ G_X
11 $\Rightarrow$ $-G_Z G_X$

схема: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle|00\rangle + |\psi\rangle|11\rangle) + \mu|00\rangle + \mu|11\rangle \xrightarrow{H_C} \frac{1}{2}(\lambda|000\rangle + \lambda|001\rangle + \lambda|110\rangle + \lambda|111\rangle + \mu|100\rangle + \mu|101\rangle + \mu|010\rangle + \mu|011\rangle)$

2) Чтоб Боб обрел сост., он должен измерить у Алисы. Это следствие

запрета на клонирование квант. сост. $\nexists$ унитар. операции $U: U|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad U|\psi\rangle|0\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes 2} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$
 $U|10\rangle = |11\rangle \quad U \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

18. Классич. и квант. энтропия. Понятия. вывод. эк. энтр.

Энтропия - степень хаоса. $\tilde{p} = (p_0, \dots, p_{N-1})$ - слс. вер-ей состоят. системы

в классич. сост. $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, то энтропия: $Sh(\tilde{p}) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i \ln(p_i)$

Обобщение энтропии на квант. сост.: $N(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$ - энтр. фон Неймана.
↳ квант. плотн.

Энтр. чистого сост. = 0 (чист. вида $|i\rangle\langle j|$, где $|j\rangle$ - базисный вектор)

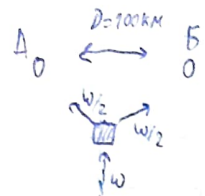
Удалим 2-й кубит на данном раст. $\Rightarrow$ 1 кубит в смешанном сост.

$S_1 = \text{tr}_2(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ и $N(S_1) = \ln(2)$. То есть, если мы добавим (вернем) 2-й

кубит, то энтропия уменьшится.

19. Квант. нелогич. сл. эксперим. Каруш. нр-ва Белла.

Квант. нр-во или квант. взаимодействие: фотон в сост. $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$



А и Б детектируют каждый свой фотон. За 1 нр-во фотон фотона датчики А и Б случайно выбирают ориентацию:

А: ϕ_A или ϕ_B ; Б: $\frac{\phi_A \pm \phi_B}{\sqrt{2}}$ А получают зап. X или Y, Б: a или b $\phi_{AB} = 1$ или -1

ξ - корр. велич. = произведение рез. измер. А и Б со знаком - если Y и b и + иначе

и собирают статистику $\xi = \begin{cases} a \cdot X & 1/4 \\ a \cdot Y & 1/4 \\ b \cdot X & 1/4 \\ b \cdot Y & 1/4 \end{cases} \quad P(\xi) = \frac{1}{4} (aX + aY + bX + bY) \leq \frac{1}{2}$ (нр-во Белла)

Запут. Мат. сл. ут. что у нас энт: $\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \quad P(\xi) = \frac{1}{4} (P(aX) + P(aY) + P(bX) + P(bY)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Каруш

Но ~~нр-во~~ ~~нр-во~~ нр-во то, что ξ -с. вел. $\langle aX \rangle_{\text{энт}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \langle aY \rangle_{\text{энт}} = \langle bX \rangle_{\text{энт}} = -\langle bY \rangle_{\text{энт}}$

Корр. величины, относящиеся к Б, зависят не только от Б комп. элементар. испор, но

и от А компоненты, и наоборот. Значит $\exists$ некий объект $\tilde{\omega}$, кот. передает

инф. о измерении между А и Б быстрее скор. света $\Rightarrow$ это не скрытый параметр фотон.

Но никак классич. информ. передавать таким образом нельзя.

Статистика измер. А не зависит от факта измерения Б.

20. Конечная мод. квант. электродин. JC, TC, TCH, точн. и RWA.

1) Ур.-я Максвелла можно свести к набору связн. ур.-я групп гармон. осцилляторов.

Граничные условия. преобраз Фурье, сводим поле к набору независ. $\left. \begin{array}{l} \hbar\omega/c, \omega - \text{частота осциллятора} \\ \text{хар-ся стр. модой (пара } (\bar{p}, \bar{E}), \bar{p} - \text{импульс, } \bar{E} - \text{напр-е поляризации)} \end{array} \right\}$ канд.

Квантование канд. осцилл. $\Rightarrow$ мода распад. на фотонные дан. моды: $\bar{p}$ - импульс фотона $\bar{p}$ дан моды
 ω - его частота

фотонны 1 моды неразличимы. $\Rightarrow$ базис. сост. i -й моды: $|n\rangle$, n - число фотонной моды

2) JC: 1 полость зеркальная, в ней атом и фотонны, они взаимодей. с полем.

$|0\rangle$ - ат. основной; $|1\rangle$ - возбужд. (декогер. - фот. может просочиться из полости из-за своей интерференционной природы)

Энерг. взаимодей. поля: $g = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} d E(x)$; V - эквив. объ. полости
 d - ат. дип. мом. $|0\rangle$ и $|1\rangle$ $E(x)$ - фактор расщепления в полости

Операторы: $a: |n\rangle_p \rightarrow \sqrt{n} |n-1\rangle_p$; $a^+: |n\rangle_p \rightarrow \sqrt{n+1} |n+1\rangle_p$; $b: |0\rangle_{at} \rightarrow 0$ $|1\rangle_{at} \rightarrow |0\rangle_{at}$; $b^+: |0\rangle_{at} \rightarrow |1\rangle_{at}$ $|1\rangle_{at} \rightarrow 0$
 собств. энергия $\xrightarrow{\text{поле}} \xrightarrow{\text{атом}}$

$H_{JC} = \hbar\omega a^+ a + \hbar\omega b^+ b + g(a^+ + a)(b^+ + b)$ - точный (примет. если разн. атома $\ll$ длины волны фотона)
 $\hbar\omega_c$

RWA-прим.: пол. волн $\rightarrow g(a^+ b + a b^+)$ (примет. если $\frac{g}{\hbar\omega} \ll 1$)

3) TC: JC, но группа n 2-ур. атомов с энергиями $g_1, g_2, \dots, g_n$. $\bar{b} = \sum_{j=1}^n g_j b_j$ $\bar{b}^+ = \sum_{j=1}^n g_j^+ b_j^+$

$H_{TC} = H_c + \hbar\omega \sum_{j=1}^n b_j^+ b_j + (a^+ + a)(\bar{b}^+ + \bar{b})$; RWA: $(a \bar{b}^+ + a^+ \bar{b})$

4) TCH: TC, но неск. полостей + волноводы; H_{TC}^i - та же ТК для полости № $i=1, 2, \dots, m$

$H_{TCH} = \sum_{i=1}^m H_{TC}^i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} M_{ij} (a_i^+ a_j + a_i a_j^+)$; M_{ij} - амплитуда перек. фот. из i в j
 $\uparrow$ о. безразм.

27. Мейн. сист. для ан. 2-х ам. мейн. познр. в точн. и RWA

Мейн. сист.: интерференц. аттаков фиксирует их взаимодействие с талем. (раскл. TC)

Сигнал $|s\rangle = |01\rangle - |10\rangle$ при $g_1 = g_2$ — мейн. не испускает фот.

Второй ам. испускает $\Rightarrow$ пишет, $\hat{c}_2 a^\dagger \Rightarrow |0\rangle_{ph} |s\rangle \rightarrow |1\rangle_{ph} |00\rangle - |1\rangle_{ph} |00\rangle \Rightarrow$ испускает не будет

Мейн: не испуска ф.; прозрачн: не поглощ. ф.; невидим: ни помол, ни испуска.

Рез-ва: 1) RWA: $\text{Dark}^{\text{RWA}} = \ker(\bar{c})$; $\text{Trans}^{\text{RWA}} = \ker(\bar{c}^\dagger)$; $\text{Invis}^{\text{RWA}} = \text{Dark} \cap \text{Trans}$

2) точн.: опер. испуска фот: $\bar{c}^\dagger + \bar{c} \Rightarrow \text{Dark} = \text{Trans} = \text{Invis} = \ker(\bar{c}^\dagger + \bar{c}) = \ker(\bar{c}) \cap \ker(\bar{c}^\dagger)$
 $\text{Dark} = \text{Invis}^{\text{RWA}}$

22. Опт. проводим. графов. Опт. темпота

Граф G : в вершинная плоскости, рёбра-волноводы — одинак. проводимость μ .

Базис. вст.: номер верш., в кот. пойд. фотон $|i\rangle$ $i=1, \dots, N$

Из верш. N есть сток (sink) — детектор.

Помещ. фот. в $|1\rangle$ и решаем упр. с факт. детект. $\Rightarrow$ матр. плотн. $P(t)$

Вер-ть что фот. вылетит в детектор в мом. врем t : $P(t) = \langle \text{sink} | \rho | \text{sink} \rangle$ — ρ -матр.
 $\uparrow$
 Опт. проводимость — ρ -матр.
 $\uparrow$
 врем. эволюция детектора

Гипотеза: 2 опт. проводим. 2 графов при некоем фиксированном начале

и концов одинакова при некоем стоке $\gamma_{\text{out}} \Rightarrow$ эти графы изоморфны

Опт. темпота: $P(t)=0$. Возьмём 2 ~~графа~~ G_1, G_2 графа с начальными и конечными O_1, O_2
 $(n-1), (n-1)_2$

отстоящими на концы $\Rightarrow$ большой гр. G . Квч сост.: соединит. (s) наскрест. по верш. O_1, O_2

и детектирует фот. вылет. из конца G . Если проводимость $G_{1,2}$ — одинакова, то

$\forall$ порцию амплитуды, пришедш. к концу G через G_1 сократится с той же кин. энерг. G_2

и $P(t)=0$, иначе — $\neq 0$ и неоднородная ф-ция.

Алг. стр. изом. гр.: в 1 выбираем квч. и кон., в 2 перебираем все возм. верш. и делаем $\uparrow$

Замеч.: $\uparrow$ над, только если: а) гипотеза верна
 б) абс. чувств. детектора.

если $P(t)=0$ где-то
 то они изоморфны

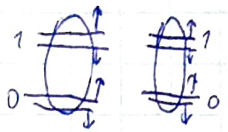
23. Квант. мех. атом-физ. атомов

Атомы как точки, связ. друг с другом оптоволокон. Могут перемещ.

фот. и электроны: примитивы: перем. электрона с ур. на ур. в дан. точке

с пом. или испуск. фотона; перем. фот. от 1 Т. к другой.

Исп. НТС из КЭД для представл. реакции ато-физ.



спин: вниз или вверх сближение $\Rightarrow$ разные спины

адиабатическая Т. (Н медленн $\Rightarrow$ с. сост. подчин. ур. Ш.)

Схема: 1) нужно поднять с ур. (0) на ур. (1); 2) сближение атомов; 3) когда $|q_0 \uparrow\rangle$ и $|q_0 \downarrow\rangle \Rightarrow$ ковалентная связь

нет туннелирования, образуется молекула - ассоциация

диссоциация: то же самое, но в обратном порядке (распад связи $\rightarrow$ разлет атомов $\rightarrow$ переход на ур.)

$$H = \underbrace{\Delta E \hat{c}_{dist}^+ \hat{c}_{dist} + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar \omega \hat{c}_{cov}^+ \hat{c}_{cov}}_{\text{энерг. взаимод. атомов}} + g_{cov} (\hat{a} \hat{c}_{cov}^+ + \hat{a}^+ \hat{c}_{cov}) \text{cond}(dist=0) + M_{TUN} \text{cond}(cov=1)$$

2 ат. 1 электрон $n_k \leq 30 \sim$ миллиард состояний

Да одна ур. не могут нх. электроны с оптич. сигналами